

KISÉRETTSÉGI MINTAFELADATSOR

I. RÉSZ

1.) Az **A** és **B** halmazokról tudjuk, hogy $A \setminus B = \{2; 3; 5\}$, $B \setminus A = \{1; 4; 7\}$,
 $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Elemei felsorolásával adja meg az **A** és a **B** halmazt, valamint szemléltesse a halmazokat Venn-diagramon!

Megoldás:

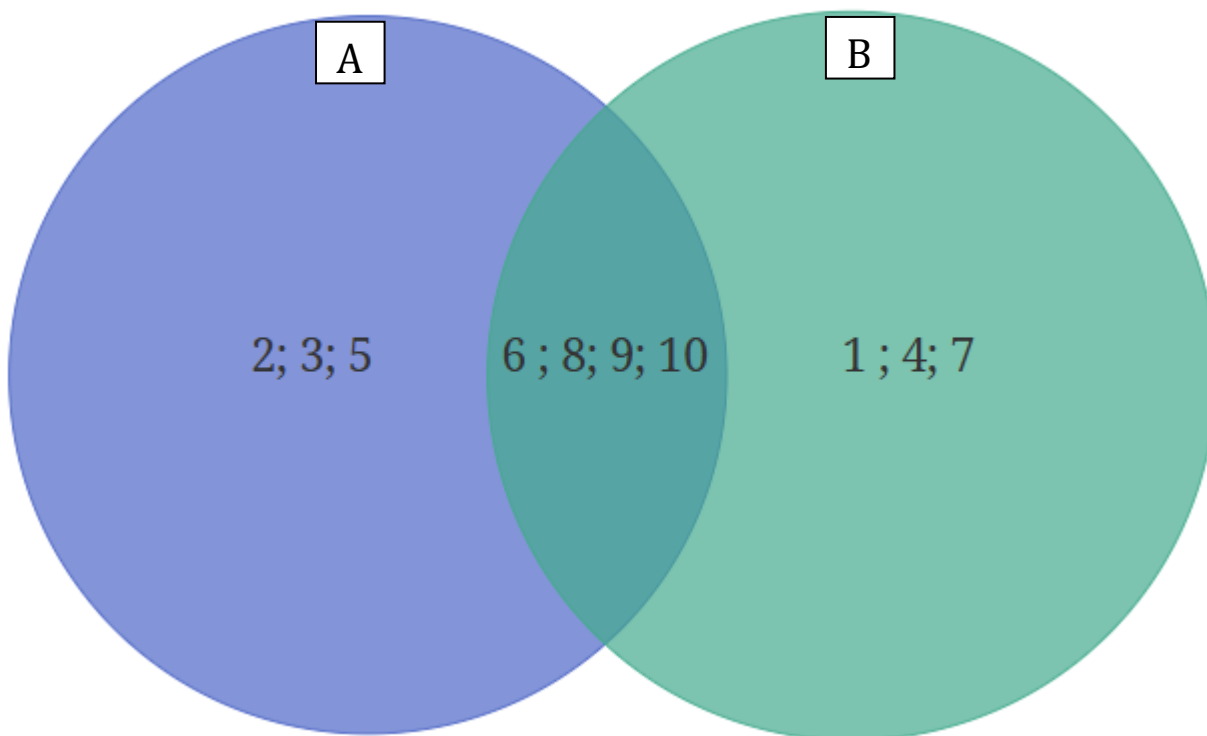
A megadott halmazműveletek alapján az elemek eloszlása a következő:

- $A \setminus B = \{2; 3; 5\}$: Ezek az elemek kizárólag az **A** halmazban találhatók meg.
- $B \setminus A = \{1; 4; 7\}$: Ezek az elemek kizárólag a **B** halmazban találhatók meg.
- $A \cap B = \{6; 8; 9; 10\}$:
A közös elemek (metszet), amelyeket az unióból kapunk meg a különbségek elhagyásával.

A halmazok elemei felsorolva:

- $A = \{2; 3; 5; 6; 8; 9; 10\}$
- $B = \{1; 4; 7; 6; 8; 9; 10\}$

A csak	$A \cap B$ (metszet)	B csak
$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{Bmatrix}$



2.) Hány éle van egy tízpontú teljes gráfnak?

Megoldás:

Egy n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Behelyettesítve a 10 pontot:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ él.}$$

3.) Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét! A számítást részletezze!

a) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} =$

b) $(\sqrt{62} - 3\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{62} + \sqrt{7}) =$

Megoldás:

a)

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{20 \cdot 45} = \sqrt{900} = 30$$

Másképp, prímtényezős felbontással:

Először bontsuk fel a számokat prímtényezőikre:

- $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$
- $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$

Helyettesítsük vissza ezeket a gyök alá, és használjuk a gyökvonás azonosságait:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{2^2 \cdot 5} \cdot \sqrt{3^2 \cdot 5}$$

$$\sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5)^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

b)

$$\begin{aligned} (\sqrt{62} - 3\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{62} + \sqrt{7}) &= \sqrt{62}^2 + \sqrt{62}\sqrt{7} - 3\sqrt{7}\sqrt{62} - 3\sqrt{7}^2 \\ &= 62 - 2\sqrt{434} - 21 = 41 - 2\sqrt{434} \end{aligned}$$

4) Egy termék árát az egyik hónapban 20% -kal, majd a következő hónapban újabb 20% -kal megemelték. A két áremelés együttesen hány százalékos áremelésnek felel meg? Válaszát indokolja!

Megoldás:

Legyen az eredeti ár x . Az első emelés után $1,2x$, a második után $1,2 \cdot (1,2x) = 1,44x$ lesz az ár.

Indoklás: Az $1,44$ szorzó **44%**-os együttes emelésnek felel meg.

5.) Egyszerűsítse le a következő kifejezéseket, amennyire csak lehet!

a) $\frac{5^4 \cdot 5^{-12} \cdot 3^8}{(3 \cdot 5^3)^{-2}} =$

b) $\frac{a^2 - 2ab}{a^2b - 2ab^2} =$

Megoldás:

a)

$$\frac{5^4 \cdot 5^{-12} \cdot 3^8}{(3 \cdot 5^3)^{-2}} = \frac{5^{-8} \cdot 3^8}{3^{-2} \cdot 5^{-6}} = 5^{-8-(-6)} \cdot 3^{8-(-2)} = 5^{-2} \cdot 3^{10} = \frac{3^{10}}{25}$$

Magyarázat:

A számlálóban alkalmazzuk az azonos alapú hatványok szorzásának azonosságát:

$$5^4 \cdot 5^{-12} = 5^{4+(-12)} = 5^{-8}$$

A nevezőben alkalmazzuk a szorzat hatványozásának azonosságát:

$$(3 \cdot 5^3)^{-2} = 3^{-2} \cdot (5^3)^{-2} = 3^{-2} \cdot 5^{-6}$$

Így a tört a következő alakot ölti:

$$\frac{5^{-8} \cdot 3^8}{3^{-2} \cdot 5^{-6}}$$

Alkalmazzuk az azonos alapú hatványok osztásának azonosságát:

$$5^{-8-(-6)} \cdot 3^{8-(-2)} = 5^{-2} \cdot 3^{10}$$

A végeredményt felírhatjuk pozitív kitevővel is:

$$\frac{3^{10}}{5^2} = \frac{3^{10}}{25}$$

b)

$$\frac{a^2 - 2ab}{a^2b - 2ab^2} = \frac{a(a-2b)}{ab(a-2b)} = \frac{1}{b} \text{ (feltéve, hogy } a \neq 0, b \neq 0, a \neq 2b)$$

Magyarázat:

A nevező szorzattá alakított alakja: $\mathbf{ab(a - 2b)}$.

Ahhoz, hogy a kifejezés értelmezhető legyen, ez a szorzat nem lehet egyenlő nullával:

$$ab(a - 2b) \neq 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Így három dolgot kell kizárnunk:

1. $\mathbf{a \neq 0}$: Ha a nulla lenne, akkor az egész nevező nullává válna.

2. $\mathbf{b \neq 0}$:

Ha b nulla lenne, a nevező szintén nulla lenne (és a végeredményben szereplő $\frac{1}{b}$ sem lenne értelmezhető).

3. $\mathbf{a - 2b \neq 0 \implies a \neq 2b}$: Ha $a =$

$2b$ lenne, akkor a zárójelben lévő kifejezés lenne nulla, ami megint nullázná a nevezőt.

Összefoglalva a kikötések:

$$\mathbf{a \neq 0; \quad b \neq 0; \quad a \neq 2b}$$

1. Lépés: Alakítsuk szorzattá a számlálót!

Vegyük észre, hogy mindkét tagban szerepel az a változó, ezért emeljük ki:

$$a^2 - 2ab = a(a - 2b)$$

2. Lépés: Alakítsuk szorzattá a nevezőt!

Itt mindkét tagban szerepel az a és a b is, tehát az ab szorzatot emelhetjük ki:

$$a^2b - 2ab^2 = ab(a - 2b)$$

3. Lépés: Írjuk fel az új alakot és egyszerűsítsünk!

$$\frac{a(a - 2b)}{ab(a - 2b)}$$

Látható, hogy a számlálóban és a nevezőben is szerepel a $(a - 2b)$ kifejezés, valamint az a szorzó is. Ezekkel egyszerűsíthetünk:

$$\frac{\cancel{a}(a - 2b)}{\cancel{a}b\cancel{(a - 2b)}} = \frac{1}{b}$$

6.) Mennyi a $4x^2 + 4x - 3 = 0$ egyenlet gyökeinek az összege? Számítását részletezze!

Megoldás:

1. Lépés: Az együttható meghatározása

- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = -3$

2. Lépés: A megoldóképlet alkalmazása

A megoldóképlet: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Számoljuk ki a diszkriminánst (a gyök alatti részt):

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 16 + 48 = 64$$

Helyettesítsünk vissza a képletbe:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

3. Lépés: A két gyök kiszámítása

- $x_1 = \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$
- $x_2 = \frac{-4-8}{8} = \frac{-12}{8} = -1,5$

4. Lépés: A gyökök összege

Most adjuk össze a kapott értékeket:

$$x_1 + x_2 = 0,5 + (-1,5) = -1$$

Másik megoldás:

1. Lépés: Azonosítsuk az együtthatókat!

- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = -3$

2. Lépés: Alkalmazzuk a gyökök összegére vonatkozó képletet!

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

3. Lépés: Behelyettesítés:

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{4} = -1$$

Végeredmény:

A gyökök összege: -1 .

7.) A tervrajzon egy szoba 5 m hosszú oldala 20 cm hosszú. A szoba 3,8 méteres szélessége hány cm-nek felel meg a tervrajzon? Válaszát indokolja!

Megoldás:

Adatok kigyűjtése:

- A szoba hossza a valóságban: $H_{\text{valóság}} = 5 \text{ m} = 500 \text{ cm}$
- A szoba hossza a tervrajzon: $H_{\text{terv}} = 20 \text{ cm}$
- A szoba szélessége a valóságban: $Sz_{\text{valóság}} = 3,8 \text{ m} = 380 \text{ cm}$
- Keresett adat: A szoba szélessége a tervrajzon (Sz_{terv}).

1. Módszer: A méretarány meghatározása

A méretarány megmutatja, hányszorosára kicsinyítettük a valóságot a rajzon.

Kiszámítása: $\frac{\text{Tervrajzi méret}}{\text{Valódi méret}}$

$$\lambda = \frac{20 \text{ cm}}{500 \text{ cm}} = \frac{1}{25}$$

Ez azt jelenti, hogy a tervrajz 1 :

25 arányú, vagyis minden méret a huszonötöde a valódinak.

Alkalmazzuk ezt a szélességre:

$$Sz_{\text{terv}} = \frac{380 \text{ cm}}{25} = \mathbf{15,2 \text{ cm}}$$

2. Módszer: Aránypár használata (Következtetés)

Ez a módszer gyakran közelebb áll a diákokhoz, mert közvetlen összefüggést mutat:

$$\begin{aligned} 500 \text{ cm valóság} &\longrightarrow 20 \text{ cm a rajzon} \\ 1 \text{ cm valóság} &\longrightarrow \frac{20}{500} \text{ cm a rajzon} \\ 380 \text{ cm valóság} &\longrightarrow 380 \cdot \frac{20}{500} \text{ cm a rajzon} \end{aligned}$$

A számítás elvégzése:

$$380 \cdot 0,04 = \mathbf{15,2 \text{ cm}}$$

Válasz:

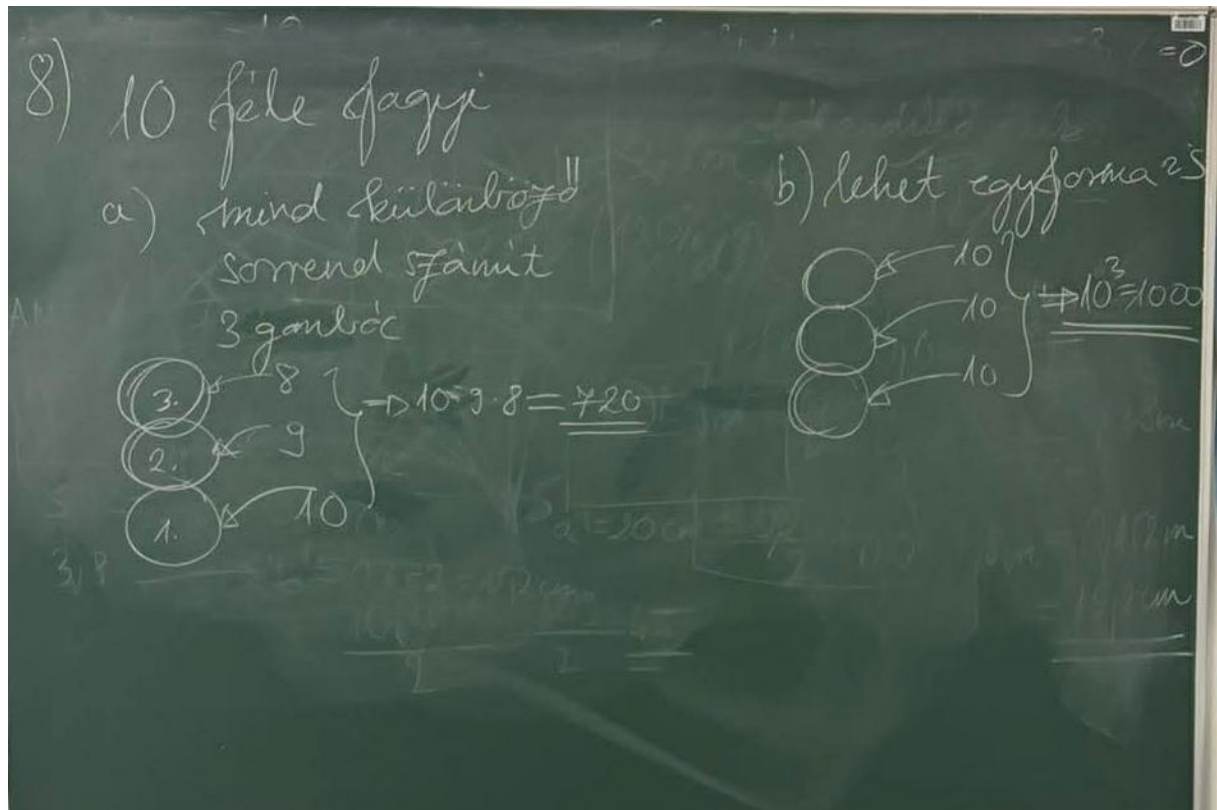
A szoba 3,8 méteres szélessége a tervrajzon **15,2 cm**-nek felel meg.

8.) Tízféle fagyalt közül választhatunk.

a) Hányféleképpen kérhetünk 3 gombócos fagyit, ha mindegyik gombóc különböző és számít a sorrend?

b) Hányféleképpen kérhetünk 3 gombócos fagyit, ha lehetnek egyforma gombócok és számít a sorrend?

Megoldás:



a) 3 különböző gombóc, a sorrend számít:

Ez egy ismétlés nélküli variáció. Elképzelhetjük úgy, hogy a tölcsérbe pakolunk:

- Az első gombóc 10 féle lehet.
- A második már csak 9 féle (mert különbözniük kell).
- A harmadik pedig 8 féle.

Összesen: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ lehetőség.

b) Lehetnek egyformák, a sorrend számít:

Ez egy ismétléses variáció. Itt minden helyre ugyanúgy 10 féleből választhatunk:

- Első hely: 10 féle.
- Második hely: 10 féle.
- Harmadik hely: 10 féle.

Összesen: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ lehetőség.

II./A RÉSZ

9.) Egy osztályban egy matematika dolgozat érdemjegyei a következők:

5; 3; 5; 4; 2; 2; 3; 5; 3; 3; 3; 1; 3; 2; 4; 2; 3; 4; 1; 2.

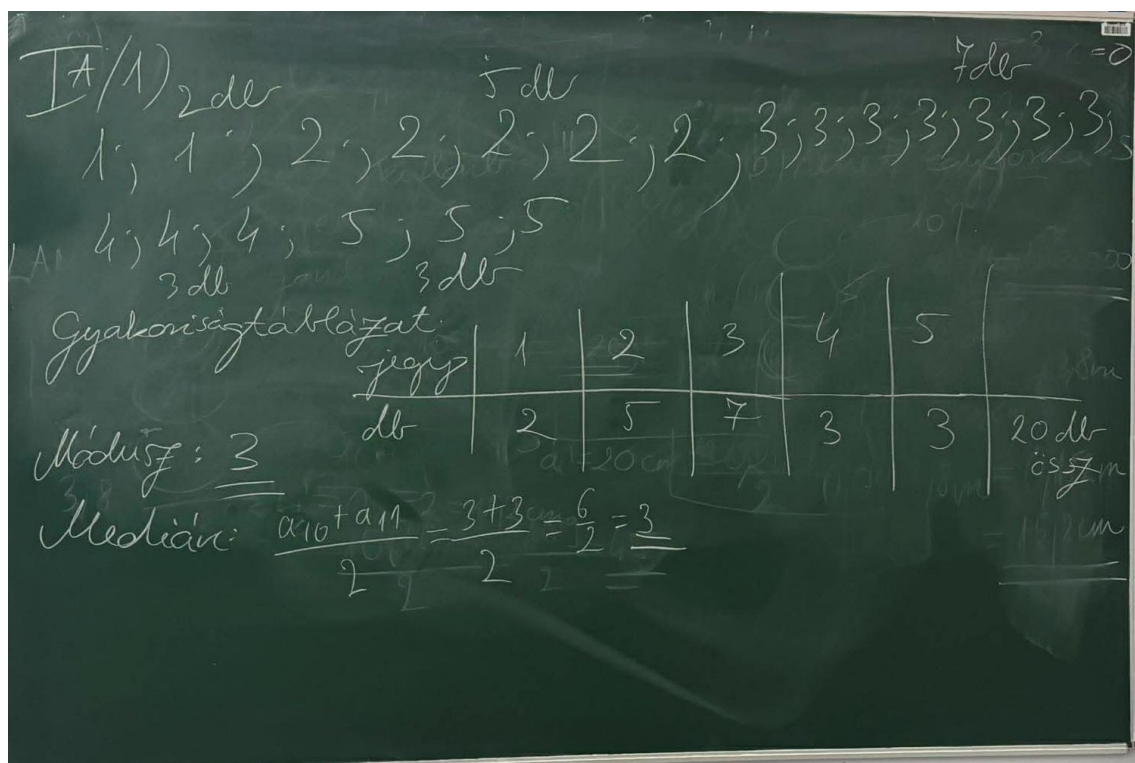
a) Készítsen az adatokból gyakorisági táblázatot!

b) Számítsa ki az osztályzatok átlagát!

c) Határozza meg az adatsor móduszát és mediánját!

d) Ábrázolja kördiagramon az osztályzatok eloszlását! Az egyes osztályzatokhoz tartozó középponti szögeket számítással határozza meg!

Megoldás:



Adatsor: 5; 3; 5; 4; 2; 2; 3; 5; 3; 3; 3; 1; 3; 2; 4; 2; 3; 4; 1; 2

Az adatok száma: $n = 20$

a) Gyakorisági táblázat készítése:

Jegy (x)	1	2	3	4	5	Összesen
Gyakoriság	2	5	7	3	3	20

b) Az osztályzatok átlaga:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3}{20}$$

$$\bar{x} = \frac{2 + 10 + 21 + 12 + 15}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

c) Módusz és medián:

- Módusz (a leggyakoribb elem): **3** (mivel 7-szer fordul elő).
- Medián (a középső elem): Páros számú adatnál (20) a 10. és 11. elem átlaga.

Rendezett sorrend: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, **3, 3**, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5

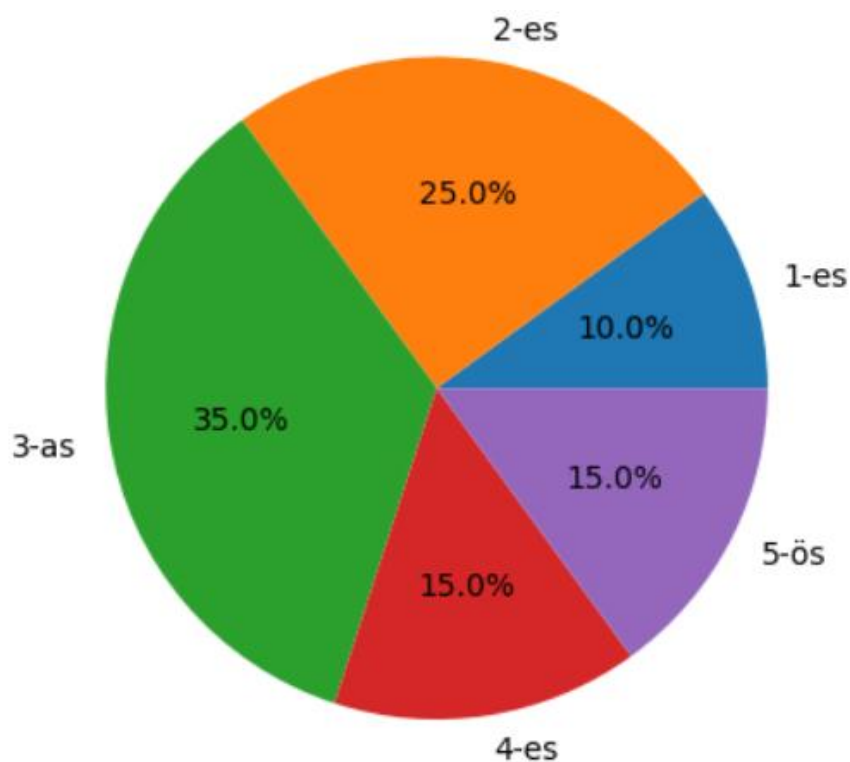
A 10. és 11. elem is 3-as.

$$\text{Medián: } \frac{3+3}{2} = \mathbf{3}$$

d) Kördiagram középponti szögei:

A teljes kör 360° , ezt osztjuk el a 20 adat között: $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ jut egy jegyre.

- 1-es: $2 \cdot 18^\circ = \mathbf{36^\circ}$
- 2-es: $5 \cdot 18^\circ = \mathbf{90^\circ}$
- 3-as: $7 \cdot 18^\circ = \mathbf{126^\circ}$
- 4-es: $3 \cdot 18^\circ = \mathbf{54^\circ}$
- 5-ös: $3 \cdot 18^\circ = \mathbf{54^\circ}$



10.) E vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően 1: 2: 3: 4. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon. Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról?

Megoldás:

Adatok:

- Arány: Anna (1) : Bea (2) : Csaba (3) : Dani (4)
- Összes egység: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ egység.
- Valaki lemondott a jutalom ötödéről ($\frac{1}{5}$).
- Ez az összeg: 16 000 Ft.

Számítás:

1. A teljes jutalom ötöde 16 000 Ft, tehát a teljes összeg:

$$16\,000 \cdot 5 = 80\,000 \text{ Ft}$$

2. Ki mondott le?

A teljes összeg 10 egységből áll. Az ötödrész ($\frac{1}{5}$) az pontosan $\frac{2}{10}$ rész.

Aki a jutalom 2 egységét kapta volna, az Bea.

Válasz: Bea mondott le a jutalmáról.

11.) Oldja meg a következő egyenleteket, illetve egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

a) $(2x - 3)^2 + 5 = 3x$

b) $-2x^2 + 9x + 10 \geq 0$

c) $\sqrt{x+5} + 3 = x + 2$

Megoldás:

a) $(2x - 3)^2 + 5 = 3x$

1. Alkalmazzuk a nevezetes azonosságot $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ alapján:

$$4x^2 - 12x + 9 + 5 = 3x$$

2. Vonjuk össze a konstansokat és rendezzük az egyenletet nullára:

$$4x^2 - 12x + 14 = 3x$$

$$4x^2 - 15x + 14 = 0$$

3. Megoldóképlet használata ($a = 4, b = -15, c = 14$):

$$x_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 14}}{2 \cdot 4} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 224}}{8} = \frac{15 \pm \sqrt{1}}{8}$$

$$x_1 = \frac{15 + 1}{8} = \mathbf{2}; \quad x_2 = \frac{15 - 1}{8} = \frac{14}{8} = \mathbf{1,75}$$

Ellenőrzés ($x_1 = 2$):

- Bal oldal (B.O.): $(2 \cdot 2 - 3)^2 + 5 = (4 - 3)^2 + 5 = 1^2 + 5 = \mathbf{6}$
- Jobb oldal (J.O.): $3 \cdot 2 = \mathbf{6}$
- $B.O. = J.O. \checkmark$

Ellenőrzés ($x_2 = 1,75$):

- Bal oldal (B.O.): $(2 \cdot 1,75 - 3)^2 + 5 = (3,5 - 3)^2 + 5 = 0,5^2 + 5 = 0,25 + 5 = \mathbf{5,25}$
- Jobb oldal (J.O.): $3 \cdot 1,75 = \mathbf{5,25}$
- $B.O. = J.O. \checkmark$

b) $-2x^2 + 9x + 10 \geq 0$

A megoldás menete három fő lépésből áll:

1. A zérushelyek meghatározása (egyenletként kezelve):

Használjuk a megoldóképletet: $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 10}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 80}}{-4}$.

Mivel $\sqrt{161} \approx 12,69$, a pontos zérushelyek:

$$x_1 = \frac{-9 + 12,69}{-4} \approx -0,92; \quad x_2 = \frac{-9 - 12,69}{-4} \approx 5,42$$

2. A függvénykép elemzése:

- Tekintsük az $f(x) = -2x^2 + 9x + 10$ függvényt.
- A főegyüttható ($a = -2$) negatív, ezért a parabola lefelé nyílik (szomorú parabola).
- Ez azt jelenti, hogy a két zérushely között a függvényértékek pozitívak (a tengely felett van a görbe).

3. A megoldáshalmaz felírása:

Mivel a feladat a $\geq$

0 tartományt keresi, a zérushelyek közötti részre és magukra a zérushelyekre van szükségünk.

$$\text{Megoldás: } x \in \left[\frac{-9 + \sqrt{161}}{-4}; \frac{-9 - \sqrt{161}}{-4} \right]$$

Kerekített értékekkel szemléltetve: $x \in [-0,92; 5,42]$.

c) $\sqrt{x+5} + 3 = x + 2$

1. Lépés: A gyökös kifejezés izolálása

Mielőtt négyzetre emelnénk, minden mást vigyünk át a jobb oldalra, hogy a gyök egyedül maradjon:

$$\sqrt{x+5} = x + 2 - 3$$

$$\sqrt{x+5} = x - 1$$

2. Lépés: Értelmezési tartomány és értékkészlet (Kikötések)

- A gyök alatt nem állhat negatív szám:

$$x + 5 \geq 0 \implies x \geq -5$$

- A négyzetgyök értéke nem lehet negatív:

Mivel $\sqrt{x+5}$ eredménye legalább nulla, a jobb oldalnak is annak kell lennie:

$$x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$$

A két feltétel közös része: $x \geq 1$. Csak ilyen megoldást fogadhatunk el.

3. Lépés: Négyzetre emelés

$$(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2$$

$$x + 5 = x^2 - 2x + 1$$

4. Lépés: Redukálás másodfokú egyenletre és megoldás

Rendezzük nullára az egyenletet:

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

Használjuk a megoldóképletet vagy a Viète-formulát:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

- $x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$
- $x_2 = \frac{3-5}{2} = -1$

5. Lépés: A megoldások vizsgálata

- $x_1 = 4$: Megfelel a $x \geq 1$ kikötésnek.
- $x_2 = -1$: Nem felel meg a $x \geq 1$ feltételnek (ez egy úgynevezett hamis gyök).

6. Lépés: Ellenőrzés (az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel)

Behelyettesítjük az $x = 4$ értéket:

Ha behelyettesítenénk az $x = -1$ -et:

- | | |
|---|---|
| • Bal oldal (B.O.): $\sqrt{4+5} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6$ | • B.O.: $\sqrt{-1+5} + 3 = 2 + 3 = 5$ |
| • Jobb oldal (J.O.): $4 + 2 = 6$ | • J.O.: $-1 + 2 = 1$ |
| • $B.O. = J.O.$ ✓ | • $5 \neq 1$ (Itt látszik, miért nem megoldás.) |

Végeredmény: $x = 4$

12.) A Föld Nap körüli pályájának hossza kb. 939 millió km. A Föld egy teljes Nap körüli „kört” kb. 365,25 nap alatt tesz meg.

a) Számítsa ki, hogy hány km/h a Föld átlagsebessége egy teljes kör megtétele során!

b) Mekkora a 939 millió km kerületű kör sugara?

Megoldás:

a)

A kiszámításhoz szükségünk van a pálya hosszára (kerületére) és az időre:

1. A megtett út (kerület) meghatározása:

A Föld pályájának sugara $r = 150\,000\,000$ km.

A kör kerülete: $K = 2 \cdot r \cdot \pi$.

$$s = 2 \cdot 150\,000\,000 \text{ km} \cdot \pi \approx 942\,477\,796 \text{ km}$$

2. Az idő meghatározása órában:

A keringési idő $t = 1 \text{ év} = 365$ nap.

Mivel $1 \text{ nap} = 24$ óra, így:

$$t = 365 \cdot 24 = 8\,760 \text{ óra}$$

3. A sebesség kiszámítása:

A sebesség képlete: $v = \frac{s}{t}$.

$$v = \frac{942\,477\,796 \text{ km}}{8\,760 \text{ h}} \approx 107\,588,8 \text{ km/h}$$

Válasz: A Föld átlagsebessége körülbelül **107 589 km/h**.

b)

Itt a kör kerületének képletéből ($K = 2 \cdot r \cdot \pi$) kell kifejeznünk a sugarat (r).

1. A képlet átrendezése:

$$r = \frac{K}{2 \cdot \pi}$$

2. Behelyettesítés:

$$r = \frac{939\,000\,000}{2 \cdot \pi}$$

$$r \approx \frac{939\,000\,000}{6,28318}$$

$$r \approx 149\,447\,898,7 \text{ km}$$

Válasz: A kör sugara körülbelül **149,45 millió kilométer** (kerekítve $\approx 149\,447\,899$ km)

II./B RÉSZ

13.)

a) Ábrázolja a következő függvényt $f: x \mapsto -(x-2)^2 + 9$; $f: [-2; 5[\rightarrow \mathbb{R}$!

b) Ábrázolja a következő függvényt $g: x \mapsto x^2 + 8x + 12$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$!

c) Határozza meg az f függvény értékkészletét!

d) Határozza meg az f függvény zérushelyét!

e) Határozza meg az f függvény maximumhelyét és maximumértékét!

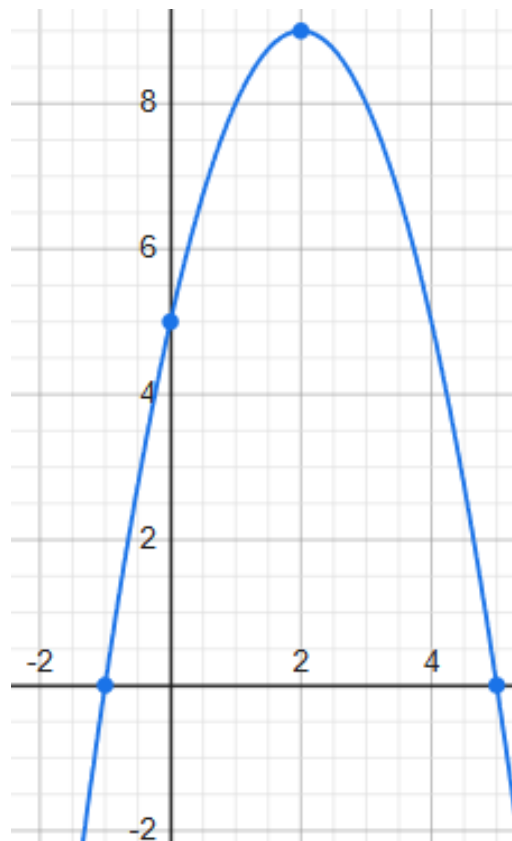
f) Határozza meg az f függvény minimumhelyét és minimumértékét!

Megoldás:

a)

Az f függvény ábrázolása: $f(x) = -(x-2)^2 + 9$; $x \in [-2; 5[$

- A függvény egy lefelé nyíló parabola (a negatív előjel miatt).
- A csúcspont (tengelypont) koordinátái: **T(2; 9)**.
- A megadott tartomány miatt a grafikon a $(-2; -7)$ ponttól (teli karika) az $(5; 0)$ pontig tart (üres karika).



c) Az f függvény értékkészlete:

- A grafikon legmagasabb pontja 9, a legalacsonyabb a tartomány szélén -7 .
- **$R_f : y \in [-7; 9]$**

d) Az f függvény zérushelye:

- $-(x-2)^2 + 9 = 0 \implies (x-2)^2 = 9.$
- $x-2 = 3 \implies x = 5$ (ez nincs benne az értelmezési tartományban).
- $x-2 = -3 \implies x = -1$

e) Maximumhely és maximumérték:

- Maximumhely: $x = 2$
- Maximumérték: $y = 9$

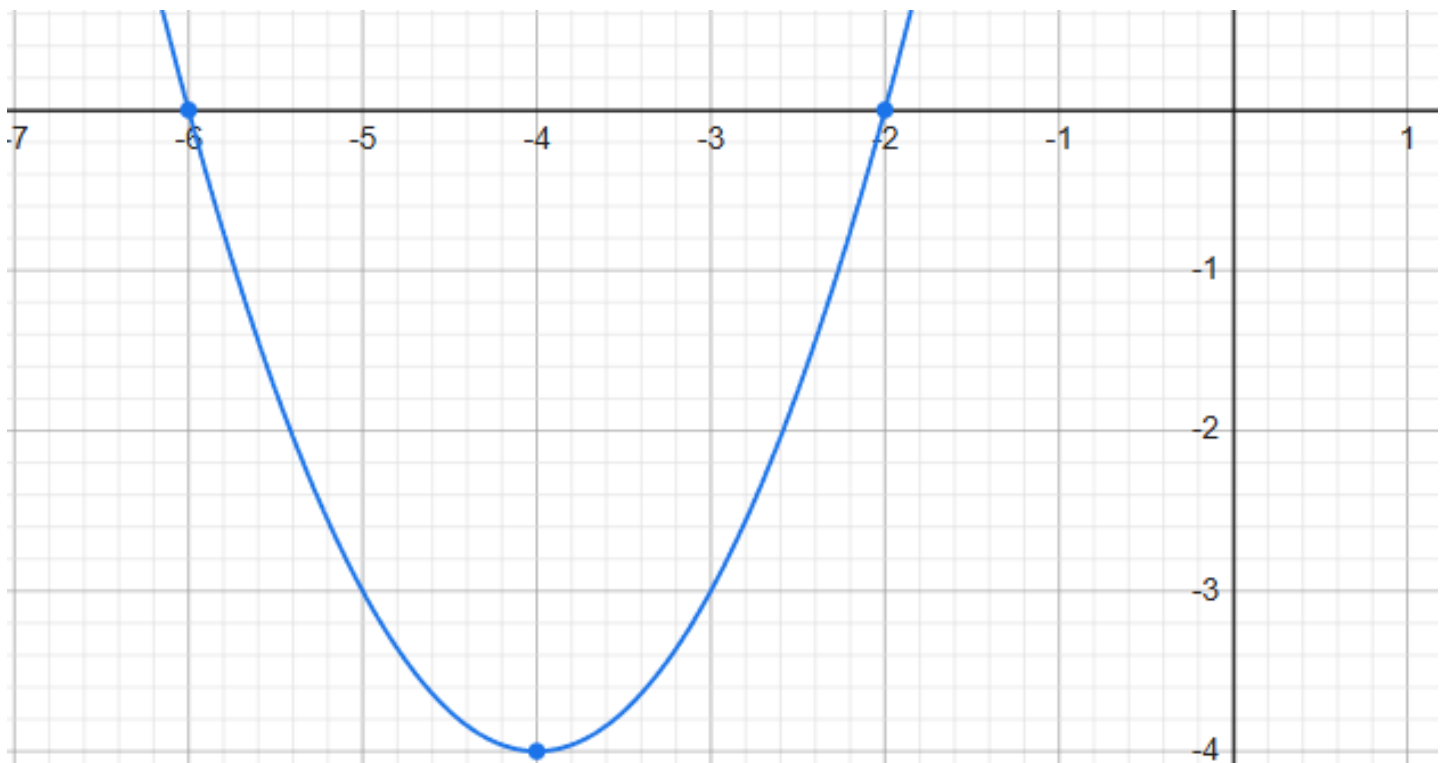
f) Minimumhely és minimumérték:

- Minimumhely: $x = -2$
- Minimumérték: $y = -7$

b)

A g függvény ábrázolása: $g(x) = x^2 + 8x + 12$

- Teljes négyzetté alakítva: $g(x) = (x+4)^2 - 4.$
- A csúcspont: $T(-4; -4).$
- Ez egy felfelé nyíló, normál parabola.



14.)

a) Mekkora egy szabályos 18-szög egy belső szöge? Mekkora egy külső szöge?

b) Hány átlója, illetve hány szimmetriatengelye van egy szabályos 18-szögnek?

Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3 : 4, kerülete 66 cm.

c) Mekkora a háromszög területe?

d) Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

Megoldás:

Szabályos 18-szög

a)

Külső szög kiszámítása:

Bármely konvex sokszög külső szögeinek összege 360° .

Mivel a sokszög szabályos, minden külső szöge egyenlő.

$$\alpha' = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{18} = \mathbf{20^\circ}$$

Belső szög kiszámítása:

Egy belső szög és a mellette fekvő külső szög összege mindig 180° .

$$\alpha = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - 20^\circ = \mathbf{160^\circ}$$

b)

Átlók száma:

Az egy csúcsból húzható átlók száma $n - 3$

(önmagába és a két szomszédba nem húzható).

Mivel minden átlót két végpontnál is megszámlalnánk, az összes átló száma:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{18 \cdot (18-3)}{2} = \frac{18 \cdot 15}{2} = 9 \cdot 15 = \mathbf{135}$$

Szimmetriatengelyek száma:

Szabályos sokszögeknél a szimmetriatengelyek száma megegyezik az oldalak számával.

Páros oldalszám esetén (mint a 18) a tengelyek fele szemközti csúcsokon, másik fele szemközti oldalfelező pontokon halad át.

Szimmetriatengelyek száma: **18**

Derékszögű háromszög adatai: $a : b = 3 : 4$, $K = 66$ cm

c)

A háromszög területe

1. Az oldalak kifejezése egy közös ismeretlennel:

Az arány alapján a két befogó legyen $a = 3x$ és $b = 4x$.

2. Az átfogó (c) meghatározása Pitagorasz-tétellel:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = \sqrt{9x^2 + 16x^2}$$

$$c = \sqrt{25x^2} = 5x$$

(Látható, hogy a háromszög oldalai a 3; 4; 5 pithagoraszai számhármassal többszörösei.)

3. Az x értékének kiszámítása a kerületből:

$$K = a + b + c$$

$$66 = 3x + 4x + 5x$$

$$66 = 12x$$

$$x = \frac{66}{12} = 5,5$$

4. A befogók tényleges hosszának meghatározása:

$$a = 3 \cdot 5,5 = 16,5 \text{ cm}$$

$$b = 4 \cdot 5,5 = 22 \text{ cm}$$

5. A terület kiszámítása:

Derékszögű háromszög esetén a terület a két befogó szorzatának fele:

$$T = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{16,5 \cdot 22}{2}$$

$$T = 16,5 \cdot 11 = 181,5 \text{ cm}^2$$

d)

A köré írható kör sugara (R)

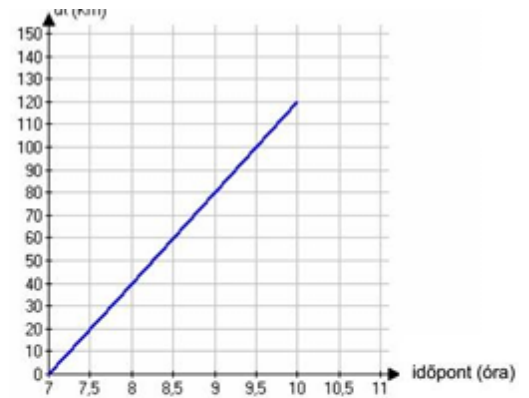
- Tétel:

A derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

- Ez azt jelenti, hogy az átfogó a kör átmérője (Thalész-tétel megfordítása).

$$R = \frac{c}{2} = \frac{27,5 \text{ cm}}{2} = 13,75 \text{ cm}$$

15.) Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordináta-rendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.



- Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában?
- Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert?

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

- Ábrázolja koordináta-rendszerben a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban
- Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot!

Megoldás:

A tehervonatra vonatkozó adatok (grafikon alapján):

- Indulás: 7 : 00 órakor.
- Megtett út 1 óra alatt (8:00-ig): 40 km.
- Sebessége: $v_t = 40$ km/h.

a) Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában?

- Keressük meg a vízszintes tengelyen a 8-as értéket (7 óra + 1 óra).
- Olvassuk le a hozzá tartozó értéket a függőleges (út) tengelyről.

Válasz: A tehervonat **40** km utat tett meg.

b) Hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert?

- Alkalmazzuk a $t = \frac{s}{v}$ képletet:

$$t = \frac{108 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = 2,7 \text{ óra}$$

- Az időt percre váltva: $0,7 \cdot 60 = 42$ perc.

Válasz: A vonat **2 óra 42** perc alatt teszi meg ezt az utat.

A gyorsvonatra vonatkozó adatok:

- Indulás: 7 : 30 (fél órával a tehervonat után).
- Sebessége: $v_{gy} = 70 \text{ km/h}$.

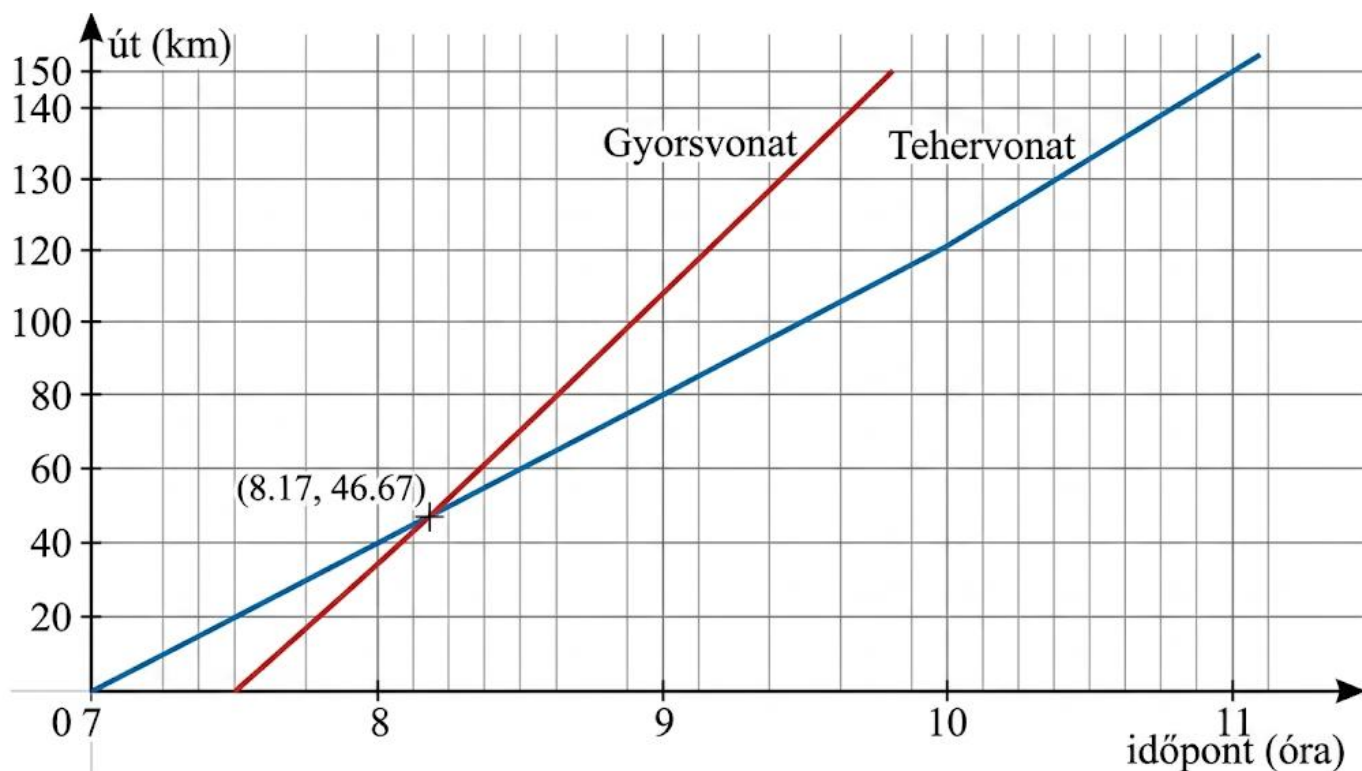
c) A gyorsvonat út-idő grafikonjának ábrázolása:

1. Első pont (indulás): A (7, 5; 0) koordináta (mivel 7:30-kor még 0 km-nél tart).
2. Második pont (9:30-kor): $9 : 30 - 7 : 30 = 2 \text{ óra}$ telt el.

$$s = v \cdot t = 70 \text{ km/h} \cdot 2 \text{ h} = 140 \text{ km}$$

Tehát a második pont koordinátája: (9, 5; 140).

3. A két pontot egy egyenes szakasszal kell összekötni a koordináta-rendszerben.



d) Mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot?

1. Jelöljük t -vel a tehervonat indulása (7:00) óta eltelt időt (órában).
2. Írjuk fel a két vonat által megtett utat t függvényében:

$$s_t = 40 \cdot t$$

$$s_{gy} = 70 \cdot (t - 0,5) \quad (\text{mivel } 0,5 \text{ órával később indult})$$

3. Az utolérés pillanatában a két megtett út egyenlő:

$$40t = 70(t - 0,5)$$

$$40t = 70t - 35$$

$$35 = 30t$$

$$t = \frac{35}{30} = \frac{7}{6} \text{ óra} = \mathbf{1 \text{ óra } 10 \text{ perc}}$$

4. Az időpont meghatározása: $7 : 00 + 1 : 10 = \mathbf{8 : 10}$.

5. A megtett út kiszámítása:

$$s = 40 \cdot \frac{7}{6} = \frac{280}{6} \approx \mathbf{46,67 \text{ km}}$$

Válasz: A gyorsvonat 8:10-kor, 46,67 km megtétele után éri utol a tehervonatot.
